



Teori Kalkulus: Pengantar Singkat tentang Konsep Turunan dan Integral

Luci Keysa Putri Fasilia¹(✉), Cahyo Hasanudin²

¹Pendidikan Matematika, IKIP PGRI Bojonegoro, Indonesia

²Pendidikan Bahasa dan Sastra Indonesia, IKIP PGRI Bojonegoro, Indonesia

key4161102@gmail.com

abstrak— Artikel ini memberikan pengantar singkat tentang konsep-konsep dasar dalam teori kalkulus, dengan fokus khusus pada turunan dan integral. Tujuan penelitian ini adalah ingin membantu pembaca memahami dasar-dasar kalkulus dan aplikasinya dalam berbagai bidang ilmu, serta meningkatkan kemampuan pembaca dalam menganalisis dan menyelesaikan masalah terkait kalkulus. Metode dalam penelitian ini menggunakan metode Systematic Literature Review (SLR). Data berupa data sekunder dari buku dan jurnal yang diterbitkan secara nasional dan internasional. Teknik pengumpulan data dalam penelitian ini dilakukan dengan metode simak, catat dan libat. Teknik validasi data menggunakan teknik triangulasi, peneliti mengembangkan dan menggabungkan konsep dan ide-ide yang terdapat dalam artikel, jurnal, dan buku sebagai salah satu jenis validasi data. Hasil penelitian kalkulus mempelajari tentang fungsi dan memiliki perubahan, baik dalam bentuk diferensial (turunan) maupun integral. Terdapat dua jenis integral 1) Integral tentu, 2) Integral tak tentu. Simpulan penelitian ini adalah turunan dan integral adalah dua konsep dasar dalam kalkulus yang digunakan untuk menemukan perubahan fungsi dalam suatu interval dan memiliki nilai yang sama dengan area di bawah kurva fungsi.

Kata kunci— kalkulus, turunan, integral

abstract— This article briefly introduces the basic concepts in calculus theory, with a special focus on derivatives and integrals. This study aims to help readers understand the basics of calculus and its applications in various fields of science and improve readers' ability to analyze and solve calculus-related problems. The method in this research uses the Systematic Literature Review (SLR) method. The data is secondary data from books and journals published nationally and internationally. Data collection techniques in this study were carried out by listening, noting, and engaging methods. Data validation techniques use triangulation techniques, researchers develop and combine concepts and ideas contained in articles, journals, and books as one type of data validation. The results of calculus research study function and have changed in the form of differential (derivative) and integral. There are two types of integrals 1) Integral certainly, 2) Integral indefinitely. This research concludes that derivative and integral are two basic concepts in calculus used to find changes in functions in an interval and have the same value as the area under the function curve.

Keywords— calculus, derivative, integral

PENDAHULUAN

Kalkulus adalah mata kuliah yang harus diambil termasuk dalam kurikulum program studi Pendidikan Matematika (Rosyadi, 2016). Kalkulus adalah fondasi yang harus dipelajari oleh seluruh mahasiswa dalam program studi Pendidikan Matematika (Bernard & Novtiar, 2022). Kalkulus berfokus pada konsep-konsep dasar yang melibatkan penggunaan simbol, rumus, grafik, dan penerapannya dalam kehidupan sehari-hari (Indrawati & Hartati, 2017). Maka dapat disimpulkan mahasiswa pendidikan matematika wajib mengambil mata kuliah kalkulus.

Perkembangan kalkulus dalam Sejarah dapat divisualisasikan dalam tiga periode berbeda: zaman dulu, zaman pertengahan, dan juga zaman sekarang (Susilo, Darhim, & Prabawanto, 2019). Dalam perjalanannya, kalkulus dikembangkan oleh dua tokoh ilmuwan terkemuka pada masa itu, Isaac Newton dan Gottfried Wilhelm Leibniz (Silalahi, dkk., 2019). Newton Menyusun penggunaan kalkulus secara luas dalam konteks fisika, sedangkan Leibniz menciptakan berbagai simbol yang digunakan dalam kalkulus hingga saat ini (Hamzah, Fajar, & Harahap, 2021). Dua ilmuwan terkenal pada masanya, Newton dan Leibniz memiliki peran penting dalam pengembangan kalkulus.

Kalkulus mencakup pemahaman dan penerapan diferensial dan juga integral fungsi beserta konsep-konsep yang terkait lainnya (Rejeki dalam Ngastiti, Alfian, & Umam, 2017). Kalkulus juga mempelajari deret tak hingga, limit (Anugrah, Nurdin, & Hafsyah, 2021), integral dan turunan (Lumbantoruan, 2017). Kalkulus melibatkan pemahaman dan penerapan diferensial dan integral, kalkulus mempelajari integral dan turunan.

Turunan (derivatif) adalah hasil dari proses diferensiasi suatu fungsi (Asyhar, 2014). Dalam Program Studi Pendidikan Matematika, mahasiswa semester pertama diajarkan mengenai turunan sebagai salah satu materi dalam mata kuliah kalkulus 1 (Ningsih, 2016). Turunan adalah dasar penting dalam analisis yang membantu memahami konsep-konsep dan prinsip-prinsip dasar turunan fungsi, sehingga dapat membantu siswa dalam menyelesaikan masalah sehari-hari (Rahmawati & Roesdiana, 2022). Turunan adalah hasil dari proses diferensiasi fungsi.

Pada studi mengenai fungsi bernilai real, konsep turunan telah diperkenalkan (Kusuma, 2017) konsep turunan adalah konsep matematika lanjutan yang menjadi kunci dalam mempelajari kalkulus setelah memahami fungsi dan limit (Purcel, Verbeg, & Rigdon dalam Hasanah, 2019). Konsep turunan mencakup pemahaman tentang fungsi, rumus dasar turunan fungsi, turunan fungsi polinomial, menemukan titik ekstrim fungsi, serta penggambaran grafik fungsi polinomial (Sagala, 2016). Konsep turunan menjadi dasar dalam mempelajari kalkulus yang mencakup pemahaman tentang, rumus dasar turunan dan lain-lain.

Salah satu contoh pengaplikasian turunan adalah untuk menggambarkan pergerakan ekonomi dengan menggunakan konsep elastisitas (Hignasari & Dharma,

2018) untuk menentukan keuntungan maksimum (Nurwahidah & Mariani, 2021). Selain itu, dalam konstruksi bangunan juga memanfaatkan konsep turunan (Fransiska, Anwar, & Syahjuzar, 2022). Penerapan turunan dapat dimanfaatkan untuk mencari keuntungan maksimum. Selain turunan, pada kalkulus juga terdapat materi integral.

Integral merupakan konsep yang sangat penting dalam bidang matematika (Kurniasi & Vebrian, 2019). Integral adalah salah satu operasi dasar dalam kalkulus integral (Monariska, 2019). Integral adalah konsep penjumlahan yang berlanjut dalam matematika (Maharani, 2023). Integral adalah salah satu konsep kunci matematika.

Secara garis besar, terdapat dua konsep integral, yaitu integral tentu dan tak tentu (Imaniyah, Susanto, & Lestari, 2021). Perbedaannya terletak pada adanya batas atas dan batas bawah dalam integral tentu (Kurniawati, dkk., 2020). Integral tentu digunakan untuk menghitung luas daerah, Panjang busur, volume benda putar, luas permukaan (Romadiastri, 2013). Integral memiliki dua konsep yaitu integral tentu dan integral tak tentu.

Integral juga memiliki manfaat yang luas dalam kehidupan sehari-hari, kemajuan IPTEK, ekonomi, serta teknik (Matodang, Saragih, & Maharani, 2023). Dalam konteks ekonomi, integral seringkali digunakan untuk menghitung produksi maksimum, total biaya produksi, dan berbagai hal lainnya (Ramadhanty, dkk., 2023). Menggunakan integral, kita dapat dengan mudah menghitung luas dan titik berat suatu bidang, dengan baik yang dibatasi oleh garis lurus maupun kurva lengkung (Suroso, 2021). Integral memiliki banyak manfaat dalam beberapa bidang.

Dengan demikian, artikel ini diharapkan dapat membantu pembaca memahami dasar-dasar kalkulus dan aplikasinya dalam berbagai bidang ilmu, serta meningkatkan kemampuan pembaca dalam menganalisis dan menyelesaikan masalah terkait kalkulus.

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan pada penelitian ini adalah *Systematic Literature Review* (SLR). Systematic Literature Review merupakan metode penelitian yang dilakukan secara sistematis dan tersorganisir untuk mengumpulkan, menilai, serta menafsirkan semua bukti penelitian yang tersedia terkait dengan suatu masalah atau topik yang diteliti. Tujuannya adalah untuk memberikan ringkasan komprehensif dan objektif dari literatur yang ada tentang topik tertentu

Data yang digunakan penulis pada penelitian ini berasal dari kata, frasa dan kalimat yang berkaitan dengan pokok pembahasan, yaitu teori kalkulus: pengantar singkat tentang konsep turunan dan integral. Data ini bersumber dari jurnal, artikel, dan buku yang diterbitkan secara nasional dan internasional.

Teknik pengumpulan data dalam penelitian ini dilakukan dengan metode simak, catat dan libat. Peneliti mencari teori dari jurnal, artikel dan buku yang sesuai dengan pokok pembahasan. Langkah selanjutnya, peneliti menuliskan konsep-

konsep yang dihasilkan dan menggabungkan dengan ide peneliti sehingga tercipta konsep yang berkaitan.

Dalam studi ini, peneliti menerapkan teknik triangulasi. Teknik triangulasi adalah metode yang digunakan untuk meningkatkan validitas dan keandalan hasil dengan menggabungkan berbagai metode, sumber data, teori, atau peneliti yang berbeda. Peneliti mengembangkan dan menggabungkan konsep dan ide-ide yang terdapat dalam artikel, jurnal, dan buku sebagai salah satu jenis validasi data.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Kalkulus adalah landasan utama dalam matematika yang mengkaji perubahan dan pengumpulan dalam hubungannya dengan fungsi matematika. Konsep utama dari kalkulus adalah turunan dan integral. Dalam artikel ini, peneliti akan memberikan pengantar singkat tentang kedua konsep tersebut serta pentingnya dalam memahami matematika serta penerapannya dalam berbagai bidang.

1. Konsep Dasar Kalkulus

Kalkulus mempelajari tentang fungsi dan memiliki perubahan, baik dalam bentuk diferensial (turunan) maupun integral. Fungsi diferensial adalah fungsi yang memiliki perubahan yang terjadi dalam suatu interval, sedangkan fungsi integral adalah fungsi yang memiliki perubahan yang terjadi dalam suatu interval dan memiliki nilai yang sama dengan area di bawah kurva fungsi.

2. Turunan

Turunan adalah suatu konsep yang mempelajari tentang perubahan fungsi dalam suatu interval. Turunan fungsi $f(x)$ pada titik $x = a$ didefinisikan sebagai:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Turunan digunakan untuk menemukan perubahan fungsi dalam suatu interval. Contoh aplikasi turunan adalah menemukan titik maksimum dan minimum fungsi.

3. Integral

Integral adalah suatu konsep yang mempelajari tentang perubahan fungsi dalam suatu interval dan memiliki nilai yang sama dengan area di bawah kurva fungsi. Integral fungsi $f(x)$ dari a ke b didefinisikan sebagai:

$$\int_a^b f(x) dx = f(b) - f(a)$$

Integral digunakan untuk menemukan area di bawah kurva fungsi volume suatu objek. Contoh aplikasi integral dalam menemukan luas dan volume suatu objek.

4. Contoh Aplikasi

a. Maksimum dan minimum fungsi

Turunan digunakan untuk menemukan titik maksimum dan minimum fungsi.

Contoh:

Tentukan selang dimana fungsi $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2$ menjadi fungsi naik/turun!

Penyelesaian:

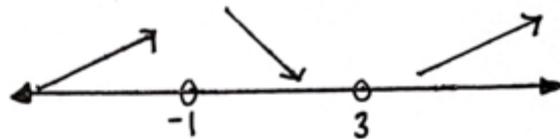
$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1) = 0$$

Bilangan kritisnya adalah $x = 3$ atau $x = -1$, maka garis bilangannya menjadi:



Uji bilangan, ambil $x=1$ substitusikan ke turunan pertama maka garis bilangannya menjadi:

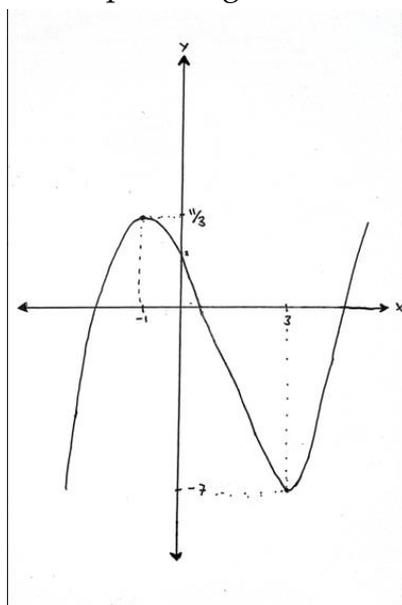


Sehingga selang fungsi naik adalah $(-\infty, -1)$ atau $(3, \infty)$ dan selang fungsi turun adalah $(-1, 3)$.

a. Jadi dicapai nilai maksimum pada $f(-1) = \frac{11}{3}$

b. Dan nilai minimum pada $f(3) = -7$

Maka diperoleh grafik:



b. Luas dan Volume

Integral digunakan untuk menemukan area di bawah kurva fungsi dan volume suatu objek.

Contoh:

$$\int_{-1}^1 x^3 - 3x^2 + 4x \, dx$$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x^3 - 3x^2 + 4x \, dx &= \int x^3 \, dx - 3 \int x^2 \, dx + 4 \int x \, dx \\ &= \frac{x^4}{4} - x^3 + 2x^2 \Big|_{-1}^1 \\ &= \left(\frac{(1)^4}{4} - (1)^3 + 2(1)^2 \right) - \left(\frac{(-1)^4}{4} - (-1)^3 + 2(-1)^2 \right) \\ &= \left(\frac{1}{4} - 1 + 2 \right) - \left(\frac{1}{4} + 1 + 2 \right) \\ &= \left(\frac{1-4+8}{4} \right) - \left(\frac{1+4+8}{4} \right) \\ &= \frac{5}{4} - \frac{13}{4} \\ &= -\frac{8}{4} \\ &= -2 \end{aligned}$$

SIMPULAN

Kalkulus adalah suatu cabang matematika yang mempelajari tentang perubahan dan integrasi fungsi. Kalkulus mencakup 1) Turunan, dan 2) Integral. Turunan dan integral adalah dua konsep dasar dalam kalkulus yang digunakan untuk menemukan perubahan fungsi dalam suatu interval dan memiliki nilai yang sama dengan area di bawah kurva fungsi. Contoh aplikasi kalkulus dapat ditemukan dalam berbagai bidang, seperti fisika, ekonomi, dan teknik.

REFERENSI

- Anugrah, D., Nurdin, N., & Hafsyah, H. (2021). Perspektif mahasiswa terhadap pelaksanaan kuliah daring dalam pembelajaran kalkulus di program studi pendidikan matematika universitas Muhammadiyah Enrekang. *DIFERENSIAL: Jurnal Pendidikan Matematika*, 2(2), 31-41. <https://ummaspul.e-journal.id/diferensial/article/view/4561>.
- Asyhar, B. (2014). Aplikasi turunan (derivatif) dalam permasalahan analisis keuntungan maksimum. *Al-kawarizmi: Jurnal Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam*, 2(1), 1-14. <https://doi.org/10.24256/jpmipa.v2i1.98>.
- Bernard, M., & Novtiar, C. (2022). Pengembangan media kalkulus menggunakan javascript geogebra untuk meningkatkan kemampuan penalaran terhadap calon guru pada pandemi covid 19. *Jurnal Pembelajaran Matematika Inovatif (JPMI)*, 5(1), 9-168. <https://doi.org/10.22460/jpmi.v5i1.p159-168>.
- Fransiska, R., Anwar, A., & Syahjuzar, S. (2022). Kesulitan siswa dalam menyelesaikan soal turunan fungsi aljabar si SMA Plus Al-'Athiyah Tahfidz Al-Qur'an Banda Aceh. *Jurnal Ilmiah Mahasiswa Pendidikan Matematika*, 7(1), 140-151. <https://jim.usk.ac.id/pendidikan-matematika/article/view/20681>.
- Hamzah, M., Fajar, Y., & Harahap, E. (2021). Aplikasi metode simpleks untuk mengoptimalkan perjalanan family gathering pada suatu perusahaan. *Jurnal Matematika Teori dan Terapan Matematika (JMTM)*, 20(2), 49-59. <https://journal.unnes.ac.id/nju/index.php/kreano/article/view/19373>.
- Hasanah, H. (2019). Analisis kesulitan mahasiswa dalam menyelesaikan soal turunan fungsi aljabar. *Jurnal Industri dan Teknologi Terpadu (Jurnal InTent)*, 2(1), 76-84. <https://doi.org/10.47080/intent.v2i1.520>.
- Hignasari, L. V., & Dharma, M. B. G. (2018). Analisis keuntungan maksimum dengan konsep turunan pada industri percetakan. *Jurnal Ilmiah Wastuwidya*, 1(2), 1-6. <https://doi.org/10.47532/jiv.v1i2.20>.
- Imaniyah, A., Susanto, K., & Lestari, A. S. B. (2021). Aplikasi integral untuk membuktikan rumus keliling lingkaran. *EULER: Jurnal Ilmiah Matematika, Sains, dan Teknologi*, 9(1), 17-23. <https://doi.org/10.34312/euler.v9i1.10486>.
- Indrawati, F., & Hartati, L. (2017). Peran penguasaan dasar matematika dan persepsi mahasiswa terhadap kemampuan pemahaman konsep mata kuliah kalkulus I. *Formatif: Jurnal Ilmiah Pendidikan MIPA*, 7(2), 107-114. <http://dx.doi.org/10.30998/formatif.v7i2.2226>.
- Kurniasi, E. R., & Vebrian, R. (2019). Pengembangan pembelajaran drill and practice berbantuan video mata kuliah kalkulus. *AKSIOMA: Jurnal Program Studi Pendidikan Matematika*, 8(3), 448-456. <http://dx.doi.org/10.24127/ajpm.v8i3.2490>.
- Kurniawati, R., Nur'Aini, N. F., Nurtsaniyah, S., Devitasari, D., & Oktaviani, R. M. (2020). Problematika siswa pada penyelesaian permasalahan integral tak tentu.

- ProSANDIKA UNIKAL (Prosiding Seminar Nasional Pendidikan Matematika Universitas Pekalongan)*, 1(1), 233-240.
<https://proceeding.unikal.ac.id/index.php/sandika/article/view/415>.
- Kusuma, W. D. (2017). Sifat turunan mutlak fungsi pada ruang metrik. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, 5(3), 74-79.
<https://ejournal.unesa.ac.id/index.php/mathunesa/article/view/20539>.
- Lumbantoruan, J. H. (2017). Pengembangan bahan ajar integral tak tentu berbasis model Small Group Discussion di program studi pendidikan matematika FKIP UKI tahun 2016/2017. *Jurnal Dinamika Pendidikan*, 10(2), 99-118.
<https://doi.org/10.51212/jdp.v10i2.610>.
- Maharani, N. (2023). Analisa kendala mahasiswa dalam menyelesaikan topik integral. *PENDIPA Journal of Science Education*, 7(1), 53-57.
<https://doi.org/10.33369/pendipa.7.1.53-57>.
- Matodang, K., Saragih, R. M. B., & Maharani, I. (2023). Peningkatan pemahaman konsep integral dengan fash method. *Journal on Education*, 5(2), 5456-5464.
<https://doi.org/10.31004/joe.v5i2.960>.
- Monariska, E. (2019). Analisis kesulitan belajar mahasiswa pada materi integral. *Jurnal Analisa Prodi Pendidikan Matematika*, 5(1), 9-19.
<https://doi.org/10.15575/ja.v5i1.4181>.
- Ngastiti, P. T. B., Alfian, A., & Umam, A. K. (2021). Efektifitas media Aplimath pada mata kuliah kalkulus I sebagai peningkatan motivasi belajar mahasiswa. *AKSIOMA: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, 12(1), 42-51.
<https://doi.org/10.26877/aks.v12i1.6979>.
- Ningsih, Y. L. (2016). Kemampuan pemahaman konsep matematika mahasiswa melalui penerapan lembar aktivitas mahasiswa (LAM) berbasis teori APOS pada materi turunan. *EDUMATICA: Jurnal Pendidikan Matematika*, 6(01), 1-8.
<https://doi.org/10.22437/edumatica.v6i01.2994>.
- Nurwahidah, N., & Mariani, A. (2021). Turunan (Derivatif): sebuah pendekatan matematis dalam analisis keuntungan maksimum. *Jurnal Matematika dan Statistika serta Aplikasinya*, 9(1), 1-6. <https://doi.org/10.24252/msa.v9i1.21406>.
- Rahmawati, N. D., & Roesdiana, L. (2022). Analisis kemampuan pemahaman konsep matematis siswa sma pada materi turunan fungsi aljabar. *Jurnal Edukasi dan Sains Matematika (JES – MAT)*, 8(1), 17-32. <https://doi.org/10.25134/jes-mat.v8i1.5579>.
- Ramadhanty, D., Kustiawati, D., Fakhrezi, F., & Dalimunte, M. R. (2023). Implementasi integral dalam bidang ekonomi di Indonesia. *ETNIK: Jurnal Ekonomi dan Teknik*, 2(1), 35-46. <https://doi.org/10.54543/etnik.v2i1.146>.

- Romadiastri, Y. (2013) Penerapan pembelajaran kontekstual pada kalkulus 2 bahasan volum benda putar. *Jurnal PHENOMENON*, 1(1), 131-143. <https://journal.walisongo.ac.id/index.php/Phenomenon/article/view/179>.
- Rosyadi, A. A. P. (2016). Pengembangan modul pembelajaran menggunakan pendekatan penemuan terbimbing pada matakuliah kalkulus. *Jurnal Pendidikan Matematika (JPM)*, 2(1), 11-15. <https://doi.org/10.33474/jpm.v2i1.201>.
- Sagala, V. (2016). Profil lapisan pemahaman konsep turunan fungsi dan bentuk folding back mahasiswa calon guru berkemampuan matematika tinggi berdasarkan gender. *Journal of Mathematics Education, Science & Technology*, 1(2), 183-198. <https://doi.org/10.30651/must.v1i2.237>.
- Silalahi, D. K., Hidayat, D., Seleky, J. S., Appulembang, O. D., & Soesanto, R. H. (2019). Pengaruh pembelajaran responsi pada mata kuliah kalkulus II terhadap hasil belajar mahasiswa program studi pendidikan matematika FIP UPH. *EduMatSains: Jurnal Pendidikan, Matematika dan Sains*, 3(2), 169-184. <https://doi.org/10.33541/edumatsains.v3i2.887>.
- Suroso, S. (2021). Penerapan integral untuk menghitung titik berat dan momen inersia suatu bidang dan volume benda putar. *Bangun Rekapima: Majalah Ilmiah Pengembangan Rekayasa, Sosial dan Humaniora*, 7(2), 99-104. <http://dx.doi.org/10.32497/bangunrekaprima.v7i2.3003>.
- Susilo, B. E., Darhim, D., & Prabawanto, S. (2019). Kesulitan belajar mahasiswa pada materi aplikasi integral untuk luas daerah dalam perspektif disposisi matematis. *Kreano, Jurnal Matematika Kreatif-Inovatif*, 10(1), 86-93. <https://doi.org/10.15294/kreano.v10i1.19373>.