



Prosiding Seminar Nasional

Unit Kegiatan Mahasiswa Penalaran dan Riset
IKIP PGRI Bojonegoro

Tema “Eksplorasi Penalaran dalam Riset untuk Meningkatkan Kualitas Publikasi Ilmiah”



Profil Kemampuan Pembuktian melalui Pendekatan dan Tantangan

Eka Putri Mulya Ningrum¹ (), Junarti², Rizki Dwi Romadhoni³, Windarsih⁴
^{1,2,3,4}Program Studi Pendidikan Matematika, IKIP PGRI Bojonegoro, Indonesia
ekaputrimulyaningrum103@gmail.com¹, junarti@ikipgribojonegoro.ac.id²,
rma804988@gmail.com³, whindarsih@gmail.com⁴

Abstrak—Kemampuan pembuktian dalam matematika merupakan bagian penting dalam membangun kemampuan analisis deduksi logis. Untuk membangun kemampuan analisis siswa dibutuhkan pendekatan efektif dan tantangan. Oleh karena itu tujuan dari kajian ini yaitu untuk mendeskripsikan profil kemampuan pembuktian melalui pendekatan dan tantangan pada siswa di sekolah menengah atas dari kajian pustaka 8 artikel Nasional dan 4 artikel internasional. Metode pengumpulan data melalui tahapan identifikasi, pengkategorian, dan mendeskripsikan kemampuan pembuktian dari berbagai pendekatan dan tantangan yang digunakan. Hasil penelitian menunjukkan profil kemampuan pembuktian siswa di sekolah menengah atas menunjukkan siswa dapat memecahkan masalah, mampu berdiskusi serta membangun argumen, dan berfikir kritis. Berdasarkan pendekatan yang digunakan dalam pembuktian ada beberapa jenis pendekatan. Sedangkan tantang yang diberikan jenisnya yakni 1) kesulitan dalam memahami konsep abstrak, 2) kecenderungan siswa mengandalkan rumus atau aturan tanpa pemahaman yang mendalam, 3) kurangnya kesempatan untuk berlatih dalam konteks yang relevan.

Kata kunci—Kemampuan pembuktian, pendekatan, dan tantangan

Abstract— The ability to prove in mathematics is an important part in building logical deduction analysis skills. To build students' analytical skills, an effective and challenging approach is needed. Therefore, the aim of this study is to describe the profile of evidentiary abilities through approaches and challenges in high school students from a literature review of 8 national articles and 4 international articles. The data collection method goes through the stages of identification, categorization, and describing the evidentiary capabilities of the various approaches and challenges used. The research results show that the profile of students' evidentiary abilities in high school shows that students can solve problems, are able to discuss and build arguments, and think critically. Based on the approach used in proof, there are several types of approaches. Meanwhile, the types of challenges given are 1) difficulty in understanding abstract concepts, 2) students' tendency to rely on formulas or rules without in-depth understanding, 3) lack of opportunities to practice in relevant contexts.

Keywords— Proofability, Approach, and Challenges.

PENDAHULUAN

Matematika tidak hanya tentang permasalahan sehari-hari, tetapi juga tentang intuisi, penalaran dan imajinasi untuk menemukan ide-ide baru dan memecahkan

teka-teki (Khan dan Krell, 2019). Apalagi berdasarkan logika konstruktif, matematika terdiri dari serangkaian proposisi yang sebagian besar merupakan proposisi yang kebenarannya hanya dapat diketahui jika dibuktikan (Sumardyono, 2018). NCTM (2000) menyatakan bahwa standar proses pembelajaran matematika meliputi pemecahan masalah, penalaran dan pembuktian, koneksi, komunikasi dan presentasi. Oleh karena itu, sebagai hasil pembelajaran matematika, penting untuk memperoleh keterampilan penalaran dan pembuktian. Menurut NCTM (2003), yang secara khusus merekomendasikan keterampilan penalaran dan pembuktian pada standar bagian kedua, setelah mempelajari matematika, siswa diharapkan mampu menalar, menyusun dan mengevaluasi argumen matematis, serta mengembangkan perhitungan matematis dan penyelidikan dapat dilakukan. Dengan demikian, kemampuan membuktikan secara matematis merupakan salah satu keterampilan yang penting untuk dikembangkan.

Pembuktian matematis diartikan sebagai seperangkat alasan yang tugasnya membenarkan atau menentang suatu pendapat, pemikiran atau sikap dan secara logis membuktikan nilai sebenarnya (Susanto, 2011). (Juandi, 2008) mendefinisikan pembuktian matematis sebagai cara berpikir formal dan logis yang dimulai dengan aksioma dan kemudian dilanjutkan melalui serangkaian langkah logis hingga suatu kesimpulan. Kedua pernyataan tersebut juga mendukung pernyataan (Hendana dan Lestar 2021) bahwa matematika pada hakikatnya terdiri dari kumpulan teorema, asumsi, proposisi, dan definisi yang telah terbukti kebenarannya. Dalam pembelajaran matematika, siswa diharapkan mampu membuktikan dan mendemonstrasikan kebenaran suatu pernyataan. Sebagaimana dikemukakan oleh Maya dan Sumarmo (Noto dkk., 2019), siswa harus memperoleh dan memperoleh keterampilan pembuktian dan ini merupakan bagian penting dalam pembelajaran matematika. Namun, keterampilan memberikan kesaksian jarang sekali disempurnakan sebagaimana mestinya. Studi: (Köğce dkk., 2010) menunjukkan bahwa kemampuan penalaran matematis siswa masih di bawah tingkat yang diharapkan. Selain itu, siswa juga mengalami hal yang sama ketika membuktikan suatu pernyataan matematika (Siallagan et al., 2021).

Skema pada definisi merupakan bagan yang menjabarkan isi suatu konsep yang ditulis dalam bentuk bagian-bagian yang berupa objek matematika yang mengandung makna (Junarti et al., 2019). Penyusunan definisi untuk membangun pembuktian matematika merupakan tugas yang kompleks. Kekompleksan pembuktian di matematika Universitas berbeda dengan pembuktian di sekolah menengah (Junarti et al., 2019). Pengertian dari pembuktian ini sangat bervariasi tergantung pada tujuan yang ingin dicapai melalui proses pembuktian tersebut. Pembuktian matematika dapat diinterpretasikan dalam dua cara, yakni sebagai proses aktual yang melibatkan konstruksi bukti dan sebagai hasil akhir dari proses tersebut.

Menurut Hersh (Nichols, 2008), ada tiga bagian dalam definisi dari pembuktian, yaitu pengujian dan penentuan keadaan sebenarnya, sebuah argumen untuk meyakinkan para ahli, dan serangkaian langkah transformasi kalimat formal sesuai aturan tertentu. Hersh menyatakan bahwa definisi kedua umumnya diterima dalam masyarakat matematika, sementara definisi ketiga lebih umum dalam bidang logika matematika dan filsafat matematika.

Pendekatan lainnya, seperti yang dikemukakan oleh Hanna dan Barbeau (VanSpronsen, 2008), serta Weber (VanSpronsen, 2008), menekankan pada langkah-langkah logis yang diperlukan untuk mencapai suatu kesimpulan dengan menggunakan aturan inferensi yang diterima. Mereka menggambarkan konstruksi bukti sebagai tugas di mana mahasiswa diberi informasi awal dan diminta untuk menerapkan aturan tertentu untuk menyimpulkan sesuatu yang diinginkan. Grassl (VanSpronsen, 2008) juga mendefinisikan bukti sebagai sekumpulan pernyataan yang benar dan terkait secara logis, yang berfungsi sebagai argumen untuk meyakinkan kebenaran dari pernyataan matematika.

Dalam pandangan humanistik, bukti dianggap sebagai alat untuk mempraktikkan dan memahami matematika (Hersh: Nichols, 2008). Hanna (Yoo, 2008) mendefinisikan pembuktian matematika sebagai argumen yang diperlukan untuk memvalidasi pernyataan dan meyakinkan orang lain. Oleh karena itu pembuktian matematika merupakan bagian penting yang harus dipelajari dalam pembelajaran matematika. Dengan demikian tujuan dari kajian ini adalah untuk mendeskripsikan profil kemampuan pembuktian melalui pendekatan dan tantangan pada siswa di sekolah menengah atas dari kajian pustaka 8 artikel Nasional dan 4 artikel internasional.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan penelitian kepustakaan (library research). Penelitian ini juga disebut sebagai penelitian kepustakaan. Penelitian literatur merupakan teknik mencari, mengumpulkan, dan menganalisis sumber data yang akan diolah dan disajikan dalam bentuk laporan penelitian literatur. Dengan mengamati beberapa surat kabar terkait untuk mendapatkan ide terkait kemampuan pemahaman konsep matematika pada siswa. Analisis data dilakukan secara khusus dengan penelitian dan analisis deskriptif.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Kemampuan pembuktian merupakan salah satu aspek penting dalam pembelajaran matematika. Kemampuan ini menggunakan logika dan penalaran matematis untuk membuktikan kebenaran suatu pernyataan atau konsep matematika. Mengembangkan kemampuan pembuktian pada siswa tidak hanya membantu mereka memahami konsep matematika secara lebih mendalam, tetapi juga melatih keterampilan berpikir kritis dan analitis yang berguna dalam kehidupan sehari-hari. Namun, mengembangkan kemampuan pembuktian pada siswa tidaklah mudah karena selalu dihadapkan pada berbagai tantangan. Artikel ini akan membahas pendekatan dan tantangan dalam mengembangkan kemampuan pembuktian pada siswa.

Dalam mengembangkan kemampuan pembuktian, pasti terdapat beberapa pendekatan dan tantangan yang dapat dilakukan. Beberapa pendekatan dalam mengembangkan kemampuan pembuktian, diantaranya : 1.) Pendekatan Berbasis Masalah: Pendekatan berbasis masalah adalah suatu metode atau pendekatan dalam memecahkan masalah yang berfokus pada pemahaman dan analisis masalah secara mendalam sebelum mencari solusi yang tepat (Sumartini, 2015). Langkah-langkah dalam melakukan pendekatan sebagai berikut: a) Identifikasi masalah: memahami

secara mendalam tentang sumber masalah, dampaknya, dan tujuan yang ingin dicapai. b) Analisis masalah: mengumpulkan data dan informasi terkait, menganalisis akar penyebab masalah, dan memahami konteks yang lebih luas dari masalah tersebut. c) Merumuskan alternatif solusi: pemikiran kreatif untuk menghasilkan ide-ide baru yang dapat mengatasi masalah yang ada. d) Evaluasi alternatif solusi: mempertimbangkan keefektifan, efisiensi, kelayakan, dan dampak dari setiap solusi yang diusulkan. e) Pemilihan solusi terbaik: solusi harus dapat mengatasi masalah dengan efektif dan efisien, dengan mempertimbangkan faktor-faktor lain seperti biaya, waktu, dan sumber daya yang tersedia. f) Implementasi solusi: merencanakan dan melaksanakan langkah-langkah yang diperlukan untuk menerapkan solusi dengan sukses. g) Evaluasi dan penyesuaian: mengamati dampak solusi, mengidentifikasi kekurangan atau masalah baru yang muncul, dan melakukan perubahan yang diperlukan untuk meningkatkan solusi.

2. Pendekatan Berbasis Diskusi: Pendekatan berbasis diskusi adalah suatu metode atau pendekatan dalam memecahkan masalah yang melibatkan diskusi dan kolaborasi antara individu atau kelompok yang terlibat (Moogangga, 2013). Pendekatan ini bertujuan untuk mendorong siswa untuk berdiskusi dan berbagi pemikiran mereka tentang suatu pernyataan atau konsep matematika, serta membangun argumen yang kuat. Berikut adalah langkah-langkah umum dalam pendekatan berbasis diskusi: a) Identifikasi masalah: memahami secara mendalam tentang sumber masalah, dampaknya, dan tujuan yang ingin dicapai. b) Pembentukan tim diskusi: Setelah masalah diidentifikasi, tim diskusi yang terdiri dari individu atau kelompok yang memiliki kepentingan atau pengetahuan terkait masalah tersebut dibentuk. c) Pengumpulan informasi: dengan melakukan penelitian, wawancara, atau pengalaman pribadi untuk memperoleh pemahaman yang lebih baik tentang masalah tersebut. d) Diskusi dan pemahaman bersama: Diskusi ini bertujuan untuk berbagi informasi dan pemikiran sehingga memperoleh pemahaman yang lebih tentang akar penyebab masalah, dampaknya, dan faktor-faktor yang terlibat. e) Analisis dan evaluasi: Menganalisis dan mengevaluasi informasi yang telah dikumpulkan. Dengan mengidentifikasi pola, tren, atau hubungan antara faktor-faktor yang terlibat dalam masalah. f) Pembentukan solusi: Melakukan pertukaran ide, debat, dan pemikiran kritis untuk mencapai solusi yang paling memungkinkan. g) Evaluasi dan pemilihan solusi: Tim diskusi mengevaluasi setiap solusi berdasarkan kriteria yang relevan. Solusi terbaik yang memenuhi kriteria tersebut dipilih. h) Implementasi solusi: Tim diskusi bekerjasama untuk merencanakan dan melaksanakan langkah-langkah yang diperlukan untuk menerapkan solusi dengan sukses. i) Evaluasi dan penyesuaian: Tim diskusi mengevaluasi hasilnya dan melakukan penyesuaian jika diperlukan dengan mengamati dampak solusi, mengidentifikasi kekurangan atau masalah baru yang muncul, dan melakukan perubahan yang diperlukan untuk meningkatkan solusi.

3. Pendekatan berbasis memberikan proyek atau tugas adalah suatu metode atau pendekatan dalam pembelajaran di mana siswa diberikan proyek atau tugas yang memerlukan pemikiran kritis dan pembuktian matematis untuk menyelesaikannya. Pendekatan ini bertujuan untuk mengembangkan pemahaman, keterampilan, dan kemampuan siswa melalui pengalaman langsung dan aplikasi praktis (Wijayanti, 2014). Berikut adalah langkah-langkah umum dalam pendekatan

berbasis memberikan proyek atau tugas: a) Identifikasi tujuan pembelajaran: Langkah pertama adalah mengidentifikasi tujuan pembelajaran yang ingin dicapai. Tujuan ini harus jelas dan terkait dengan materi atau keterampilan yang ingin diajarkan kepada siswa. b) Desain proyek atau tugas: Berdasarkan tujuan pembelajaran, proyek atau tugas yang sesuai dirancang. Proyek atau tugas ini harus mencerminkan situasi nyata atau masalah yang relevan dengan konteks pembelajaran. c) Pengenalan proyek atau tugas: Siswa diperkenalkan dengan proyek atau tugas yang akan mereka kerjakan, kemudian diberikan panduan atau petunjuk yang diperlukan untuk memulai proyek atau tugas. d) Penelitian dan eksplorasi: Siswa melakukan penelitian dan eksplorasi untuk memperoleh pemahaman yang lebih baik tentang topik atau masalah yang terkait dengan proyek atau tugas. e) Perencanaan dan pengorganisasian: Siswa membuat jadwal, membuat daftar tugas, atau membuat rencana kerja yang terperinci. f) Pelaksanaan proyek atau tugas: Siswa melaksanakan proyek atau tugas sesuai dengan rencana yang telah mereka buat. Mereka menerapkan pengetahuan dan keterampilan yang telah mereka pelajari untuk menghasilkan solusi yang diharapkan. g) Evaluasi dan refleksi: Siswa mengevaluasi hasil kerja mereka sendiri. Mereka merefleksikan proses pembelajaran, mengidentifikasi kekuatan dan kelemahan, dan melakukan perbaikan jika dibutuhkan. h) Presentasi atau pameran: Siswa mempresentasikan atau memamerkan hasil proyek atau tugas mereka kepada kelas atau audiens lainnya untuk berbagi pengetahuan dan pengalaman mereka.

Tantangan dalam mengembangkan kemampuan pembuktian terdapat beberapa faktor, termasuk abstraksi konsep, ketergantungan pada rumus dan aturan, serta kurangnya latihan yang relevan. Berikut adalah penjelasan lebih lanjut tentang setiap tantangan ini: a) Abstraksi konsep: Merupakan kemampuan untuk mengidentifikasi inti dari suatu konsep matematika dan menghayalkan benda non fisik (Nurhikmayati, 2017). Tantangan dalam abstraksi konsep adalah memahami konsep secara mendalam dan menghubungkannya dengan konsep-konsep lain. Beberapa konsep matematika dapat sangat kompleks, dan abstraksi konsep membantu dalam menyederhanakan masalah dan mengidentifikasi pola atau hubungan yang ada. Namun, mengembangkan kemampuan abstraksi konsep membutuhkan latihan dan pemahaman yang mendalam. b) Ketergantungan pada rumus dan aturan: Sebagian besar siswa mengandalkan rumus dan aturan dalam kegiatan pembuktian (Kurmaryono, 2023). Tantangan dalam hal ini adalah memahami konsep di balik rumus dan aturan tersebut, dan mampu menerapkannya dengan tepat dalam konteks yang berbeda. Ketergantungan yang berlebihan pada rumus dan aturan dapat menghambat kemampuan untuk berpikir kreatif dan fleksibel dalam pembuktian. Oleh karena itu, penting untuk memahami dasar-dasar konsep matematika dan mengembangkan pemahaman yang mendalam. c) Kurangnya latihan yang relevan: Latihan yang relevan dan bervariasi merupakan faktor penting dalam mengembangkan kemampuan pembuktian (Fadillah, 2016). Tantangan dalam hal ini adalah kurangnya sumber latihan yang sesuai dengan tingkat kemampuan dan kebutuhan individu. Latihan yang relevan membantu dalam memperkuat pemahaman konsep, mengasah keterampilan pemecahan masalah, dan meningkatkan kemampuan berpikir logis dan kritis. Kurangnya latihan yang relevan dapat menghambat perkembangan kemampuan pembuktian.

Dalam menghadapi tantangan tentu diperlukan strategi yang tepat untuk mengatasinya. Berikut adalah beberapa strategi yang dapat dilakukan: 1. Memberikan Latihan yang Beragam: Memberikan latihan yang beragam dan menantang siswa untuk membuktikan kebenaran suatu pernyataan atau konsep matematika. 2. Membangun Koneksi dengan Konteks Nyata: Mengaitkan konsep matematika dengan situasi atau masalah dalam kehidupan nyata untuk membantu siswa memahami dan menerapkan pembuktian dalam konteks yang relevan. 3. Mendorong Diskusi dan Kolaborasi: Mendorong siswa untuk berdiskusi dan berkolaborasi dalam memecahkan masalah matematika, sehingga mereka dapat saling mendukung dan membangun argumen yang kuat.

SIMPULAN

Signifikansi kemampuan pembuktian dalam pembelajaran matematika, yang tidak hanya meningkatkan pemahaman konsep tetapi juga melatih keterampilan berpikir kritis. Tiga pendekatan utama dalam mengembangkan kemampuan ini, yaitu berbasis masalah, berbasis diskusi, dan memberikan proyek atau tugas, memberikan panduan langkah demi langkah. Namun, tantangan seperti abstraksi konsep, ketergantungan pada rumus, dan kurangnya latihan relevan juga diidentifikasi.

Strategi untuk mengatasi tantangan tersebut melibatkan pemberian latihan yang beragam, mengaitkan konsep dengan konteks nyata, dan mendorong diskusi serta kolaborasi. Poin-poin ini menyimpulkan bahwa mengembangkan kemampuan pembuktian membutuhkan pendekatan yang holistik dan terintegrasi dalam pembelajaran matematika.

REFERENSI

- Fadillah, S., & Jamilah, J. (2016). Pengembangan bahan ajar struktur aljabar untuk meningkatkan kemampuan pembuktian matematis mahasiswa. *Jurnal Cakrawala Pendidikan*, 35(1). <https://doi.org/10.21831/cp.v1i1.8379>.
- Hanna, G. (1991). "Mathematical Proof". Dalam D. Tall (ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Hendana, I. P., & Lestari, K. E. (2021). Analisis Kemampuan Pembuktian Matematis pada Materi Persamaan dan Pertidaksamaan Linear Satu Variabel. *Seminar Nasional Matematika Dan Pendidikan Matematika*, 178–184. Retrieved from <http://conference.unsika.ac.id/index.php/sesiomadika/Sesiomadika2021>.
- Juandi, D. (2008). *Pembuktian, Penalaran, dan Komunikasi Matematik*. Jurnal Pendidikan Matematika FPMIPA UPI.
- Junarti, Sukestiyarno, Y., Waluya, S. B., & Kartono. (2019). Peran Skema Penulisan Definisi, Teorema Dan Bukti Dalam Kemandirian Belajar Membuktian Aljabar Abstrak Dengan Pendekatan Top-Down. *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika*, 2, 637–645.

Kusmaryono, I. PENGETAHUAN KONSEPTUAL DAN PROSEDURAL DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA.

Köğçe, D., Aydin, M., & Yildiz, C. (2010). The views of high school students about proof and their levels of proof (The case of Trabzon). *Procedia - Social and Behavioral Sciences*. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.03.370>.

Khan, S., & Krell, M. (2019). Scientific Reasoning Competencies: a Case of Preservice Teacher Education. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 19(4), 446–464. <https://doi.org/10.1007/s42330-019-00063-9>.

MOOGANGGA, H. (2013). Meningkatkan hasil belajar siswa materi sifat cahaya melalui pendekatan kontekstual berbasis diskusi kelompok Kelas V SDN 3 Momalia Kecamatan Posigadan Kabupaten Bolaang Mongondow Selatan. *Skripsi*, 1(151412360).

NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

NCTM. (2003). *Standards for Secondary Mathematics Teacher*. The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Nichols, S. R. (2008). *Student-to-Student Discussions: The Role of the Instructor and Students in Discussions in an Inquiry-Oriented Transition to Proof Course*, Disertasi pada The University of Texas at Austin: Tidak dipublikasikan.

Noto, M. S., Priatna, N., & Dahlan, J. A. (2019). Mathematical Proof: the Learning Obstacles of PreService Mathematics Teachers on Transformation Geometry. *Journal on Mathematics Education*, 10(1), 117–126. <https://doi.org/10.22342/jme.10.1.5379.117-126>.

Nurhikmayati, I. (2017). Kesulitan berpikir abstrak matematika siswa dalam pembelajaran problem posing berkelompok. *Kalamatika: Jurnal Pendidikan Matematika*, 2(2), 159-176. <https://doi.org/10.22236/KALAMATIKA.vol2no2.2017pp159-176>.

Siallagan, F., Sinaga, B., & Rajagukguk, W. (2021). Analisis Kemampuan Penalaran dan Berpikir Kreatif Matematis Siswa dalam Pembelajaran Penemuan Terbimbing. *Paradikma: Jurnal Pendidikan Matematika*, 14(1), 68–74.

Sumardyono. (2018). Kemampuan Guru dalam Menyusun Bukti Matematis. *Indonesian Digital Journal of Mathematics and Education*, 5(8), 510–522. Retrieved from <http://idealmathedu.p4tkmatematika.org>.

Sumartini, T. S. (2015). Peningkatan kemampuan penalaran matematis siswa melalui pembelajaran berbasis masalah. *Mosharafa*, 4(1), 1-10.

Susanto, H. A. (2011). Pemahaman Pemecahan Masalah Pembuktian Sebagai Sarana Berpikir Kreatif. Prosiding Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan, Dan Penerapan MIPA, Fakultas MIPA, Universitas Negeri Yogyakarta, 189-196.

VanSpronsen, H. D. (2008). Proof Processes of Novice Mathematics Proof Writers. Disertasi pada The University of Montana Missoula: Tidak dipublikasikan.

Wijayanti, A. (2014). Pengembangan autentic assesment berbasis proyek dengan pendekatan saintifik untuk meningkatkan keterampilan berpikir ilmiah mahasiswa. *Jurnal Pendidikan IPA Indonesia*, 3(2). Retrieved from <http://journal.unnes.ac.id/nju/index.php/jpii>.