Prosiding
Seminar Nasional
Unit Kegiatan Mahasiswa Penalaran dan Riset
IKIP PGRI Bojonegoro
Tema "Eksplorasi Penalaran dalam Riset untuk Meningkatkan Kualitas Publikasi Ilmiah"

Profil Proses Berpikir Mahasiswa dalam Pembuktian Matematis pada Aljabar Abstrak

Junarti[1(✉)], Ari Indriani[2], Boedy Irhadtanto[3], Lia Sofia[4]
[1,2,4]Program Studi Pendidikan Matematika, IKIP PGRI Bojonegoro, Indonesia
[3]Program Studi Pendidikan Teknologi Informasi, IKIP PGRI Bojonegoro, Indonesia
junarti@ikippgribojonegoro.ac.id

abstrak— Proses berpikir merupakan bagian penting yang dibutuhkan dalam pembuktian matematis. Aljabar abstrak merupakan mata kuliah analisis yang membutuhkan kompetensi pembuktian. Tujuan penelitian ini untuk mendeskripsikan proses berpikir yang terjadi ketika melakukan pembuktikan pada mata kuliah aljabar abstrak. Pada kajian ini pembuktian matematis dibedakan atas pembuktian pemenuhan syarat-syarat pada definisi suatu konsep dan pembuktian pada teorema. Metode penelitian menggunakan pendekatan deskriptif kuantitatif-kualitatif berbasis tugas, disertai instrumen tes dan wawancara. Sampel penelitian yaitu dua kelas mahasiswa yang mengikuti mata kuliah aljabar abstrak sebanyak 25 mahasiswa. Sedangkan 4 subyek penelitian dipilih berdasarkan 2 jenis pembuktian. Hasil penelitian secara kuantitatif menunjukkan proses berpikir mahasiswa yang menggunakan tahapan analogi→abstraksi sebanyak 83 %, konstruksi→analogi sebanyak 11 %, abstraksi→konstruksi 6%, sedangkan untuk sampai tahapan konstruksi formal masih sebesar 0%. Secara kualitatif kecenderungan subyek dalam melakukan pembuktian terkait suatu himpunan dengan operasi biner tertentu pemenuhan syarat-syarat grup/subgrup sudah menggunakan tahapan berpikir abstraksi→konstruksi, sedangkan pembuktian bentuk teorema masih menggunakan tahapan berpikir analogi→abstraksi. Hal ini menunjukkan mahasiswa masih adanya ketergantungan pada contoh-contoh pembuktian teorema yang terdapat pada buku.
Kata kunci—Proses berpikir, Pembuktian matematis, Aljabar abstrak

Abstract— The thinking process is an important part required in mathematical proof. Abstract algebra is an analysis course that requires evidential competence. The aim of this research is to describe the thinking process that occurs when carrying out proofs in abstract algebra courses. In this study, mathematical proof is differentiated into proof of the fulfillment of the conditions in the definition of a concept and proof of theorems. The research method uses a task-based quantitative-qualitative descriptive approach, accompanied by test and interview instruments. The research sample was two classes of students taking abstract algebra courses totaling 56 students. Meanwhile, 4 research subjects were selected based on 2 types of evidence. Quantitative research results show that students' thinking processes use the analogy→abstraction stage as much as 83%, construction→analogy as much as 11%, abstraction→construction 6%, while up to the formal construction stage it is still 0%. Qualitatively, the subject's tendency to carry out proofs related to a set with certain binary operations to fulfill group/subgroup requirements already uses the abstraction→construction thinking stage, while proving the theorem form still uses the analogy→abstraction thinking stage. This shows that students are still dependent on examples of theorem proofs found in books.

Keywords— Thinking process, Mathematical proof, Abstract algebra

PENDAHULUAN

Proses berpikir merupakan bagian penting dalam tahapan pembuktian matematis. Proses berpikir dalam domain pengetahuan yang lebih kompleks untuk mencari wawasan tentang proses berpikir kreatif, yang diharapkan memperbaiki kualitas pengajaran (Tall, 2002). Struktur berpikir siswa akan mempengaruhi cara berpikirnya proses mahasiswa karena proses berpikir mahasiswa akan mengikuti struktur berpikir yang dimiliki (Tohir & Maswar, 2021). Struktur berpikir yang dimiliki mahasiswa merupakan tahapan yang digunakan ketika melakukan pemahaman konsep, pemecahan masalah, hingga pembuktian matematis. Sebelum sampai pada tahapan pembuktian matematis, tentunya diawali tahapan pemahaman definisi suatu konsep hingga menggunakan definisi tersebut. Pada tahapan pemahaman definisi dibutuhkan proses abstraksi (Zahri et al., 2020)(Junarti et al., 2019). Selain itu dibutuhkan pula pemahaman pada materi prasyarat pada konsep tersebut (Rach & Ufer, 2020) (Junarti et al., 2023a). Kebutuhan lainnya seperti kemampuan mengkoneksikan antar konsep (Wittmann, 2021)(Junarti et al., 2020)(Junati et al., 2023b), kemampuan literasi (Abidah et al., 2023) (Junarti, & Zainudin, M. (2022) (Zainudin et al., 2023). Semua bagian tersebut saling terkait untuk menunjang proses berpikir dalam pembuktian matematis.

Pembuktian matematis merupakan tahapan membuktian baik pembuktian secara langsung dan tak langsung. Pembuktian langsung dengan menjabarkan yang diketahui berikut latar belakangnya untuk memenuhi yang akan dibuktikan. Sedangkan pembuktian tak langsung dilakukan dengan dua jenis yakni tahapan induksi dan bukti kontradiksi/kontraposisi. Oleh karena itu proses berpikir yang dialami mahasiswa ketika melakukan proses pembuktian berpikir formal yang melibatkan penalaran logis (Junarti et al., 2022).

Struktur aljabar atau aljabar abstrak merupakan salah satu materi matematika aksiomatik yang terdiri dari definisi dan teorema-teorema (Junarti et al., 2022). Mempelajari struktur aljabar akan memfasilitasi pengembangan penalaran logis, sehingga memudahkan pembelajaran aspek matematika aksiomatik lainnya termasuk di dalamnya teorema beserta pembuktiannya. Aljabar abstrak merupakan mata kuliah analisis yang membutuhkan kompetensi pembuktian. Pada pembuktian matematis dibedakan atas pembuktian pemenuhan syarat-syarat pada definisi suatu konsep dan pembuktian pada bentuk teorema-teorema. Dalam pembuktian teorema dibutuhkan tantangan yang belum dipahaminya pada gagasan baru (Ioannou, 2019), alokasi perhatian, permintaan kognitif, dan proses membaca matematika (Panse et al., 2018). Selain itu dibutuhkan penggabungan skema dari pembuktian pada bentuk-bentuk/teorema-teorema sebelumnya (Kanellos et al., 2018) dan kerangka pembuktian (Selden et al., 2016). Bagian tersebut mempunyai peran penting dalam proses berpikir ketika melakukan tahapan pembuktian matematis.

Proses berpikir pada pembuktian tentunya membutuhkan proses penalaran. Di dalam proses penalaran membutuhkan pemahaman. Di dalam pemahaman membutuhkan proses abstraksi, analogi, konstruksi, generaliasi, konstruksi formal (Junarti et al., 2022).

Berdasarkan hal-hal tersebut di atas menunjukkan akan pentingnya kompetensi pembuktian matematis dalam aljabar abstrak. Oleh karena itu, tujuan dari penelitian ini yaitu untuk mendeskripsikan proses berpikir yang terjadi ketika melakukan pembuktikan pada mata kuliah aljabar abstrak.

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan pada penelitian ini yaitu menggunakan pendekatan deskriptif kuantitatif-kualitatif berbasis tugas, kuesioner tentang proses berpikir, instrumen tes dan wawancara. Sedangkan Sampel penelitian menggunakan sampel jenuh yaitu semua mahasiswa yang mengikuti mata kuliah aljabar abstrak dilibatkan semua sebanyak 25 mahasiswa. Sedangkan kerangka kerja proses berpikir yang digunakan acuan yaitu mengadaptasi 4 tahapan (Junarti et al., 2022) yakni tahapan analogi→abstraksi, konstruksi→analogi, abstraksi→konstruksi, konstruksi formal.

Subyek penelitian dipilih 4 mahasiswa berdasarkan karakteristik yang dipenuhi ke dalam 4 jenis proses bepikir yang dominan. Dua jenis pembuktian yang dikaji dibedakan atas bentuk yang akan dibuktikan yakni 1) bentuk pembuktian teorema-teorema pada konsep grup dan subgrup, 2) bentuk pembuktian pemenuhan suatu himpunan dengan operasi biner terhadap syarat-syarat grup dan sub grup. Soal pembuktian yang diberikan yaitu disajikan pada Tabel 1 berikut.

Tabel 1. Daftar Soal Bentuk Pembuktian Matematis

No.	Bentuk Pembuktian	Soal
1.	Teorema-teorema pada konsep grup dan subgrup.	1) Jika (G; o) adalah suatu grup, maka untuk setiap a, b ∈ G berlaku $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$ 2) Misalkan (G; o) suatu grup, S ⊂ G, dan S ≠ ∅, S adalah subgrup dari G jika dan hanya jika: i) Untuk setiap a, b ∈ S terdapat a o b ∈ S (S tertutup terhadap operasi o) ii) Untuk setiap a ∈ S terdapat a^{-1} ∈ S 3) Jika (G, o) suatu grup, H dan K masing-masing adalah subgrup dari G maka H ∩ K suatu subgrup dari G pula
2.	Pemenuhan suatu himpunan dengan operasi biner terhadap syarat-syarat grup dan sub grup	1) G = {A, B, C, D} dengan operasi perkalian matriks merupakan Grup jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

	2) G = {x | x = a$\sqrt{b}$, a bilangan bulat dan b bilangan asli} dengan operasi penjumlahan. Buktikan G merupakan grup. 3) G = {1, 2, 3, 4} himpunan bilangan bulat modulo 5 yang bukan nol. (G, x) grup komutatif. Tentukan subgrup dari (G, x) !

Penelitian ini dilakukan selama 7 pertemuan yang meliputi 3 tugas individu, tes tertulis diambil melalui ujian tengah semester, dan wawancara menggunakan pedoman wawancara kepada 4 subyek penelitian setelah dilakukan tes tertulis. Selanjutnya data dianalisis secara deskriptif kuantitatif dilanjutkan pendalaman melalui analisis kualitatif disertai trianguali metode dan triangulasi sumber. Triangulasi metode dilakukan dengan membandingkan hasil tugas, hasil tes dan hasil kuesioner. Sedangkan triangulasi sumber dilakukan dengan membandingkan antar subyek penelitian pada kriteria yang sama pada dua jenis pembuktian.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil penelitian secara kuantitatif diperoleh melalui kuesioner proses berpikir dan melalui tes tentang pembuktian. Tahapan proses berpikir diukur setelah dilakukan tugas pembuktian dan tes pembuktian. Hasil prosentase dari masing-masing jenis proses berpikir yang dialami mahasiswa disajikan menurut 4 jenis proses berpikir dan menurut bentuk pembuktian (dibedakan atas yang dibutktikan berbentuk teorema dan berbentuk pemenuhan suatu himpunan dengan operasi biner terhadap syarat-syarat grup dan sub grup). Berikut ini disajikan rekapitulasi proses berpikir yang dialami mahasiswa selama melakukan pembuktian baik dalam bentuk tugas maupun ketika melakukan tes pembuktian. Hasil rekapitusasi proses berpikir disajikan pada Tabel 2 berikut ini.

Tabel 2. Rekapitulasi Proses Berpikir Mahasiswa Dalam Pembuktian Matematis

No.	**Bentuk Pembuktian**	**Jenis Proses Berpikir (dalam %)**			
		analogi →abstraksi	**konstruksi →analogi**	**abstraksi→ konstruksi**	**konstruksi formal**
1.	teorema-teorema pada konsep grup dan subgrup.	83% (21)	11% (3)	6% (1)	0%
2.	pemenuhan suatu himpunan dengan operasi biner terhadap syarat-syarat grup dan sub grup	8% (2)	32% (8)	60% (15)	0%

Berdasarkan Tabel 2 di atas menunjukkan bahwa jenis proses berpikir yang dominan dilakukan mahasiswa ketika membuktikan bentuk teorema-teorema adalah melalui tahapan analogi→abstraksi artinya mahasiswa masih menggantungkan bentuk pembuktian teorema yang ada dibuku dan selanjutnya baru dapat mengabstraksikan definisi atau teorema-teorema yang terkait. Hal ini menegaskan bahwa mahasiswa belum dapat mengawali pembuktian tanpa ada contoh pembuktian yang sama atau mirip. Setelah dilakukan kroscek dengan pembuktian yang dilakukan pada tugas mahasiswa dan pada pekerjaan hasil tesnya menunjukkan ada kesesuaian hasil pada kuesionernya. Dengan demikian berdasarkan kajian kualitatif dari 21 mahasiswa ini ada kesesuaian antara hasil tugas, hasil pekerjaan tes, hasil kuesioner, dan hasil wawancaranya.

Selanjutnya pada bentuk pembuktian yang kedua yaitu bentuk pemenuhan suatu himpunan dengan operasi biner terhadap syarat-syarat grup dan sub grup, mahasiswa sudah dapat melakukan proses berpikir jenis abstraksi→konstruksi sebesar 60% yakni sebanyak 15 mahasiswa dari total 25 mahasiswa. Hasil ini menunjukkan mahasiswa dapat melakukan proses berpikir abstraksi ketika membuktikan grup dari suatu himpunan dengan menunjukkan empat syarat yakni tertutup, asosiatif, adanya elemen identitas, dan untuk setiap elemen pada himpunan tersebut mempunyai inversnya. Berdasarkan 3 soal yang diberikan pada saat tes bahwa hasil pekerjaan mahasiswa menunjukkan dengan tingkat kebenarannya 95%. 15 mahasiswa ini dapat menunjukan setiap syarat grup dengan lengkap dan beberapa saja kurang teliti ketika menuliskan kesimpulan bahwa kesembarangan elemen himpunan sering jarang dituliskan. Hasil ini menunjukkan kecenderungan mahasiswa sudah dapat melakukan proses abstraksi dari definisi grup ke dalam soal pembuktian dan selanjutkan 15 mahasiswa ini juga dapat mengkonstruksi pembuktian grup sesuai dengan syarat grup secara lengkap dan rinci. Hasil ini setelah dilakukan proses verifikasi dengan hasil kuesioner proses berpikir dan hasil tugas, hasil tes pembuktian, dan hasil wawancara menunjukkan adanya kesesuaian. Dengan demikian secara kualitatif adanya kesesuaian hasil.

Tabel 3. Sebaran Subyek Penelitian Menurut Jenis Proses Berpikirnya

No.	Bentuk Pembuktian	Jenis Proses Berpikir (dalam %)			
		analogi→abstraksi	konstruksi →analogi	abstraksi→konstruksi	konstruksi formal
1.	teorema-teorema pada konsep grup dan subgrup.	M-1, M-3,M-4,M-5,M-6,M-8,M-9,M-10,M-11,M-12,M-13,M-14,M-16,M-17,M-19,M-20,M-21,M-22,M-23,M-24,M-25	M-2, M-15, M-18	M-7	-
2.	pemenuhan suatu himpunan dengan operasi biner terhadap syarat-syarat grup dan sub grup	M-1, M-22	M-4, M-8,M-11,M-16,M-17,M-21,M-24,M-25	M-2, M-3,M-4,M-5,M-6,M-8,M-9,M-10,M-11,M-12,M-13,M-14,M-15,M-16,M-17,M-18,M-19,M-20,M-21,M-23,M-24,M-25	-

Pemilihan subyek penelitian di dasarkan pada jenis proses berpikir pada bentuk pembuktian teorema-teorema (pembuktian bentuk pertama). Berdasarkan sebaran jumlah pilihan jenis berpikir menyebar pada jenis berpikir pertama analogi→abstraksi sebanyak 21 mahasiswa, jenis berpikir kedua konstruksi→analogi sebanyak 3 mahasiswa, dan 1 mahasiswa yang menggunakan jenis berpikir jenis ketiga abstraksi→konstruksi, serta tidak ada mahasiswa yang mencapai tahapan berpikir konstruksi formal. Oleh karena itu, subyek penelitian dipilih 2 mahasiswa dari jenis berpikir analogi→abstraksi yakni M-9 dan M-21, sedangkan 2 mahasiswa lagi dipilih dari jenis berpikir konstruksi→analogi yakni M-2 dan M-18.

Berdasarkan hasil kuesioner dari 2 subyek penelitian yang masuk kategori bentuk pembuktian yang pertama yaitu dari bentuk teorema-teorema pada konsep grup dan subgrup menurut jenis proses berpikir yang dominan yaitu analogi→abstraksi (yakni subyek M-9 dan M-21). Pada tahapan ini subyek dapat mengekstraksi struktur sifat atau objek matematika yang dikenal melalui analogy/contoh-contoh pembuktian untuk mengkonstruksi struktur sifat atau objek matematika yang baru atau bentuk yang belum pernah dibuktian , kemudian baru dapat mengabstraksi definisi/teorema terkait ketika melakukan pembuktian (Junarti et al., 2022). Namun pada pembuktikan bentuk ke-2 bahwa kedua subyek ini sudah menggunakan proses berpikir jenis abstraksi→konstruksi. Pada bentuk pembuktian yang kedua subyek sudah dapat melakukan proses abstraksi definisi grup dan subgrup ke dalam himpunan pada suatu operasi biner.

Selanjutnya dipilih 2 subyek penelitian menurut jenis proses berpikir yang dominan yaitu konstruksi→analogi (yakni subyek M-2 dan M-18) dalam melakukan kedua bentuk pembuktian menunjukkan adanya kesamaan dalam melakukan pembuktian maupun dalam proses berpikirnya. Selanjunya dilakukan pendalaman melalui wawancara sebagai bentuk triangulasi metode dan triangulasi sumber.

Hasil yang diperoleh berdasarkan triangulasi metode adanya kesesuaian jawaban dari pekerjaan tes dan kuesioner baik pada kelompok bentuk pembuktian yang pertama maupun pada kelompok pembuktian yang kedua. Sedangkan hasil triangulasi sumber juga menunjukkan kesesuaian antara subyek M-9 dengan subyek M-21, antara subyek M-2 dengan subyek M-18.

Berdasarkan hasil koesioner menunjukkan kecenderungan kedua subyek M-9 dan M-21 mempunyai karakteristik proses berpikir yang sama ketika melakukan pembuktian bentuk teorema selalu tergantung pada contoh-contoh pembuktian pada buku, tanpa contoh kedua subyek ini bingung untuk memulai pembuktian. Hal ini bersesuaian dengan masalah pembuktian mahasiswa masih mengandalkan contoh bukti teorema yang ada pada buku dan mahasiswa masih terkurung pada contoh ketika melakukan proses pembuktian (Junarti et al., 2019)

Namun kedua subyek M-9 dan M-21 ketika melakukan pembuktian bentuk yang ke-2 yakni pemenuhan suatu himpunan dengan operasi biner terhadap syarat-syarat grup dan sub grup sudah dapat menuliskan pembuktian dengan baik dan benar dengan menggunakan proses berpikir abstraksi→konstruksi.

Subyek yang sudah menggunakan proses berpikir konstruksi→analogi yakni M-2 dan M-18 menunjukkan kecenderungan dapat melakukan konstruksi bukti mulai dari menyusun pola yang diketahui dan yang akan dibuktikan. Kedua subyek ini mengkonstruksi melalui struktur sifat atau objek matematika yang sudah dikenal melalui deduksi logis dari definisi grup dan subgrup, kemudian baru dapat menganalogi struktur sifat atau objek matematika pada teorema yang akan dibuktikan. Hal ini bersesuaian dengan (Junarti et al., 2022) bahwa tahapan berpikir ini merupakan tahapan transisi untuk mencapai tahapan berpikir formal yakni pada konstruksi formal. Selanjutnya bersesuaian pula dengan (Dreyfus, 2002) ketika mahasiswa harus membangun sifat-sifat konsep tersebut melalui deduksi dari definisi dengan melibatkan proses abstraksi untuk mencapai tujuan walaupun dalam bentuk latihan-latihan dalam tugas-tugas yang diberikan. Dalam bab ini, proses-proses yang dilalui di antaranya mengabstraksi, menganalisis dan mendiskusikan dengan tujuan mahasiswa sadar akan apa yang terjadi selama proses tersebut. Kedua subyek ini juga menunjukkan dapat melakukan penalaran yang baik dengan menggunakan data untuk membuat, menguji, atau memperdebatkan suatu dugaan bukti teorema yang akan dibuktikan (Scusa, 2008).

Pada proses berpikir siswa dalam mengkonstruksi bukti yang diawali dengan stimulus atau rangsangan tersebut kemudian dimasukkan ke dalam register sensorik melalui indera penglihatan dan pendengaran yang selanjutnya terfokus pada proses pembuktian. Persepsi tentang rangsangan sesuai dengan informasi yang diberikan pada pembuktian, jika menggunakan memori jangka pendek pada konstruksi pembuktian dengan induksi matematika dimulai pada pengambilan konsep-konsep prinsip induksi matematika (Buhaerah et al., 2022). Namun pembuktian yang tidak menggunakan induksi matematika menuntut pembuktian analisis membutuhkan tingkat penalaran dan focus yang tinggi. Menurut (Kuswardi et al., 2020) proses berpikir matematis tingkat lanjut meliputi lima tahapan: 1) representasi matematis, 2) abstraksi matematis, 3) menghubungkan represenatsi dan abstraksi matematis, 4) berpikir Kreatif, dan 5) pembuktian matematis. Kesamaan yang dibutuhkan dalam proses pembuktian pada kajian ini yaitu adanya proses abstraksi matematis dan berpikir kreatif. Sedangkan proses representasi matematis membutuhkan kemampuan literasi matematis dan konseksi matematis. Kemampuan lain seperti kemampuan menghubungkan antara representasi dan abstraksi matematis bersesuaian dengan bagaimana mahasiswa mengkonseksikan antara konsep yang dibutuhkan untuk mendukung proses pembuktian.

Tingkat kemampuan literasi matematis (Hwang & Ham, 2021) dan kemampuan mengkoneksikan antar kosep ikut berperan dalam identifikasi awal dalam proses berpikir ketika melakukan pembuktian (Junarti & Zainudin, 2022). Hal ini sesuai dengan (Junarti et al., 2020) (Junati et al., 2023b) bahwa ada enam jenis koneksi matematika (koneksi representasi, koneksi struktural, koneksi prosedural, koneksi implikasi, koneksi generalisasi, dan koneksi hierarki) pada materi aljabar abstrak mempengaruhi konstruksi-analogi. Komponen dasar proses pembuktian matematis dalam aljabar abstrak dan mengatur proses pembuktian menjadi beberapa fase yang dapat dilakukan melalui bantuan komponen dasar yang diawali dengan menentukan hipotesisnya (dugaan), menentukan keputusan, penggunaan hipotesis, langkah-langkah proses pembuktian, pencapaian bukti. (Çetin & Dikici, 2021). Langkah-langkah ini membantu pada proses pembuktian.

Oleh karena itu banyak kegiatan yang terjadi dalam siklus yang terjadi pada pemecahan masalah matematika dasar dalam memaknai definisi formal dan melakukan proses deduksi menjadi salah satu faktor yang membedakan pemikiran matematika tingkat lanjut (Tall, 2002). Sehingga berlanjut ke kalangan mahasiswa di tingkat Universitas bahwa dalam melakukan pembuktian yang lebih tinggi memerlukan proses berpikir yang mengarah kepada tahapan deduksi logis. Bukti terbaik adalah bukti yang membantu memahami apa yang telah dibuktikan pada teorema dengan menunjukkan tidak hanya bahwa hal tersebut benar tetapi juga mengapa hal tersebut benar (Hanna, 2014). Bukti juga harus ditunjukkan dengan ringkas, logis, dan benar (Zahri et al., 2020) dan yang mencakup kata-kata penting baik dalam bentuk symbol, angka, maupun kalimat (Junarti et al., 2019).

SIMPULAN

Simpulan pada penelitian ini secara kuantitatif menunjukkan bahwa proses berpikir mahasiswa yang menggunakan tahapan analogi→abstraksi sebanyak 83 %, konstruksi→analogi sebanyak 11 %, abstraksi→konstruksi 6%, sedangkan untuk sampai tahapan konstruksi formal masih sebesar 0% dari 25 sampel penelitian. Secara kualitatif kecenderungan subyek dalam melakukan pembuktian terkait suatu himpunan dengan operasi biner tertentu pemenuhan syarat-syarat grup/subgrup sudah menggunakan tahapan berpikir abstraksi→konstruksi, sedangkan pembuktian bentuk teorema masih menggunakan tahapan berpikir analogi→abstraksi. Hasil ini menunjukkan pada proses pembuktian bentuk teorema masih ketergantungan pada contoh-contoh pembuktian teorema pada buku, selian itu mahasiswa masih bingung untuk memulai pembuktian.

UCAPAN TERIMA KASIH

Pada kesempatan ini ucapan terima kasih disampaikan kepada Rektor dan Ketua LPPM IKIP PGRI Bojonegoro yang telah memberikan ijin penelitian pada mata kuliah aljabar abstrak.

REFERENSI

Abidah, A., Junarti, & Zuhriah, F. (2023). Profil Kemampuan Literasi Matematis Siswa Sekolah Dasar Dengan Gaya Belajar Auditori. *Seminar Nasional FPMIPA IKIP PGRI Bojonegoro*, 112–118. https://prosiding.ikippgribojonegoro.ac.id/index.php/ FPMIPA/article/viewFile/2174/1354

Buhaerah, Nasir, M., & Jusoff, K. (2022). The Students Thinking Process in Constructing Evidence with Mathematics Induction Reviewed from Information Processing Theory. *JTAM (Jurnal Teori Dan Aplikasi Matematika)*, *6*(2), 461–475.

Çetin, A. Y., & Dikici, R. (2021). Organizing the mathematical proof process with the help of basic components in teaching proof : Abstract algebra example. *International Journal on Math, Science and Technology Education*, *9*(1), 235–255.

Dreyfus, T. (2002). Advanced Mathematical Thinking Process. In H. Buersfeld, J. Kilpatrick, G. Leder, S. Tumau, & G. Vergnaud (Eds.), *Advanced Mathematical Thinking* (Tall, Davi, pp. 25–40). Kluwer Academic Publishers.

Hanna, G. (2014). *Proof , Explanation and Exploration : An Overview*. *December 2000*. https://doi.org/10.1023/A

Hwang, J., & Ham, Y. (2021). Relationship Between Mathematical Literacy and Opportunity to Learn with Different Types of Mathematical Tasks. Journal on Mathematics Education, 12(2), 199-222. http://doi.org/10.22342/jme.12.2.13625. 199-222

Ioannou, M. (2019). The Challenge of Proof in Abstract Algebra: Undergraduate Mathematics Students' Perceptions. *Inter-America Conference on Mathematics Education*, 1–10. https://pdfs.semanticscholar.org/a88b/436963803fcbfba2e0094 5bf1c3b40c9f11e.pdf

Junarti, Sukestiyarno, Y., Waluya, S. B., & Kartono. (2019). Peran Skema Penulisan Definisi, Teorema Dan Bukti Dalam Kemandirian Belajar Membuktian Aljabar Abstrak Dengan Pendekatan Top-Down. *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika*, *2*, 637–645.

Junarti, S., Mulyono, Y. L., & Dwidayati, N. K. (2020). Studi Literatur tentang Jenis Koneksi Matematika pada Aljabar Abstrak. *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika*, *3*, 343–352.

Junarti, & Zainudin, M. (2022). Strategi Efektif Untuk Meningkatkan Kemampuan Literasi Matematika. *JPE (Jurnal Pendidikan Edutama*, *9*(2), 107–124. http://ejurnal.ikippgribojonegoro.ac.id/index.php/JPE

Junarti, Zainudin, M., & Utami, A. D. (2022). The sequence of algebraic problem-solving paths: Evidence from structure sense of Indonesian student. *Journal on Mathematics Education*, *13*(3), 437–464. https://doi.org/10.22342/jme.v13i3. pp437-464

Junarti, Noeruddin, A., Boedy Irhadtanto, & Sarmidi. (2023a). Kata kunci: Kemampuan konsep limit fungsi, Prasyarat analisis riil. *Seminar Nasional FPMIPA IKIP PGRI Bojonegoro*, *1*, 278–284. https://prosiding.ikippgribojonegoro.ac.id/ index. php/ FPMIPA/article/viewFile/2197/1378

Junarti, Yani T., A., & Amin, A. K. (2023b). Building Student's Mathematical Connectin Abitity in Abstract Algebra: The Combination of Analogi-Construction-Abstraction Stages. *Journal of Education, Teaching, and Learning*, *8*(1), 80–97.

Kanellos, I., Nardi, E., & Biza, I. (2018). Proof schemes combined: mapping secondary students' multi-faceted and evolving first encounters with mathematical proof. *Mathematical Thinking and Learning*, *20*(4), 277–294. https://doi.org/10.1080/10986065.2018.1509420

Kuswardi, Y., Usodo, B., Chrisnawati, H. E., & Nurhasanah, F. (2020). Kemampuan berpikir matematis tingkat lanjut berdasarkan tingkat kepercayaan diri mahasiswa pada pembelajaran matematika diskrit. *Journal Of Mathematics and Mathematics Education*, *10*(2), 61–74. https://doi.org/10.20961/jmme.v10i2.47080

Panse, A., Alcock, L., & Inglis, M. (2018). Reading Proofs for Validation and Comprehension: an Expert-Novice Eye-Movement Study. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *4*(3), 357–375.

https://doi.org/10.1007/s40753-018-0077-6

Rach, S., & Ufer, S. (2020). Which Prior Mathematical Knowledge Is Necessary for Study Success in the University Study Entrance Phase ? Results on a New Model of Knowledge Levels Based on a Reanalysis of Data from Existing Studies. International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 6, 375–403. https://doi.org/10.1007/s40753-020- 00112-x

Scusa, T. (2008). "Five Processes of Mathematical Thinking" Summative Projects for MA Degree. 38.https://digitalcommons.unl.edu/mathmidsummative/38

Selden, A., Selden, J., & Benkhalti, A. (2016). *Proof Frameworks--A Way to Get Started , submitted as a Tennessee Technological University Mathematics Technical Report , March 31 , 2016 . March*. https://doi.org/10.13140/RG.2.1.4160.9368

Tall, D. 2002. *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers: London.

Tohir, M., & Maswar, M. (2021). Pseudo Thinking Process in Understanding the Concept of Exponential Equations Pseudo Thinking Process in Understanding the Concept of Exponential Equations. *Journal of Physics: Conference Series*, 1–7. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1808/1/012043

Wittmann, E. C. (2021). Connecting Mathematics and Mathematics Education. In *Connecting Mathematics and Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/978-3-030-61570-3

Zahri, M., Syarifuddin, A., & Imam, M. (2020). *Efektivitas Pembuktian Aljabar Abstrak Mahasiswa Calon Guru*. *3*, 605–611.

Zainudin, M., Fatah, D. A., & Junarti, J. (2023). Literacy and Numeracy Research Trends For Elementary School Student : A Systematic Literature Review. *Journal of Education, Teaching, and Learning*, *8*(2), 24–31.